رابطه‌سازی نوین برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج★

ایمان زردی[۱] جواد علامتیان[۲]

چکیده *در این مقاله رابطه‌سازی نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج پیشنهاد می‌گردد. نخست معادله‌های خطا برای تکرارهای رهایی پویا ارائه می شود. سپس، با استفاده از نگرهٔ گرشگورین بهبود یافته، کران‌های جدیدی برای کمیت جرم ساختگی به دست می‌آید. رابطه سازی پیشنهادی به الگوریتم جدیدی برای روش رهایی پویای لزج منجر می‌گردد. برای سنجش کارایی عددی فرایند پیشنهادی، سازه‌های مختلفی مانند خرپا و قاب‌های دو بعدی و سه‌بعدی، با رفتارهای خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می‌شوند. نتایج این تحلیل‌ها نشان می‌دهد که استفاده از الگوریتم ارائه‌شده و رابطهٔ نوین پیشنهادی برای جرم ساختگی، نرخ همگرایی روش رهایی پویای لزج را بهبود می‌دهد، به گونه‌ای که همگرایی با تعداد کمتری تکرار انجام می‌پذیرد.*

واژه‌های کلیدی روش رهایی پویا، میرایی لزج، جرم ساختگی، رفتارغیرخطی، نیروی نامیزان، نرخ همگرایی.

A New Formulation for Fictitious Mass in the Viscous Dynamic Relaxation Method

I. Zardi J. Alamatian

Abstract *In this paper, new algorithm is proposed for fictitious mass of Dynamic Relaxation (DR) method with viscous damping. First, the incremental equations are derived for DR procedure. By using the transformed Gershgörin theory, new boundaries are achieved for fictitious mass. This formulation leads to a new algorithm for viscous DR method. For evaluating the efficiency of the proposed method, some 2D and 3D truss and frame structures are analyzed by elastic linear and geometrically nonlinear behaviors. Results show that the proposed scheme for fictitious mass improves the convergence rate of DR method so that the suggested algorithm presents the structural response with less iteration in comparison with other common DR techniques.*

Key Words Dynamic Relaxation Method, Viscous Damping, Fictitious Mass, Nonlinear Behavior, Residual Energy, Convergence Rate.

★ تاریخ دریافت مقاله۹۴/۱۱/۱۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۹/۲۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد. Email: alamatian@mshdiau.ac.ir

مقدمه

هدف از تحلیل یک سازه، محاسبهٔ تغییرمکان‌ها و تنش‌های پدید آمده در عضوهای آن، تحت اثر بارهای اعمالی می‌باشد. در این میان، می‌توان تنش‌ها را برحسب تغییرمکان‌های گرهی نوشت. درنتیجه، تغییرمکان‌های گرهی به‌عنوان مجهول اصلی از تحلیل سازه به‌دست می‌آیند. برای رسیدن به این هدف، دو نوع تحلیل خطی و غیرخطی (غیرخطی مواد، هندسی و تکیه‌گاهی) وجود دارد. اگر ماتریس سختی مستقل از تغییرمکان‌های گرهی باشد، تحلیل خطی است. در غیر این‌صورت، تحلیل غیرخطی می‌باشد. باید دانست، چنانچه، ماتریس سختی سازه در هنگام تحلیل تغییر کند، رفتار آن سازه غیرخطی خواهد بود. منشأ ایجاد رفتارهای غیرخطی را می‌توان به سه دستهٔ غیرخطی مواد، هندسی و تکیه‌گاهی تقسیم کرد. عامل غیرخطی مواد ناشی از ویژگی‌های ذاتی مصالح سازه و تغییرشکل‌های مومسان آن است. رابطهٔ غیرخطی تنش- کرنش، جاری‌شدن مواد و تغییرشکل‌های ماندگار ناشی از باربرداری سبب ایجاد این رفتار می‌گردند. ازسوی‌دیگر، در حالت غیرخطی هندسی تغییرشکل‌های سازه بزرگ درنظر گرفته می‌شود. در این نوع تحلیل، شکل هندسی سازه در هر مرحله تغییر می‌کند. این رفتار هنگامی پدید می‌آید که تغییرمکان‌ها، دوران‌ها و یا کرنش‌های سازه بزرگ باشند. چنانچه شرایط تکیه‌گاهی سازه در هنگام بارگذاری تغییر کنند، رفتار غیرخطی تکیه‌گاهی پدید می‌آید. در این پژوهش، نمونه‌های عددی با رفتار غیرخطی هندسی تحلیل می‌شوند. دستگاه معادله‌های حاکم بر رفتار سازه‌های ایستا که بااستفاده از رابطه‌سازی اجزای محدود یا تفاوت‌های محدود به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر است:

$$SD = F = P \qquad (۱)$$

در این رابطه، $S = \left[S_{ij}\right]$ ماتریس سختی سازه است که متقارن و به ابعاد $q \times q$ می‌باشد. کمیت q، تعداد درجه‌های آزادی سازه است. همچنین، $D = \left\{d_i\right\}$، $P = \left\{p_i\right\}$ و $F = \left\{f_i\right\}$، به‌ترتیب، بردارهای تغییرمکان، نیروی داخلی و بار خارجی سازه می‌باشند. برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها، دو رویکرد وجود دارد؛ روش‌های صریح و ضمنی. فرایند تکراری رهایی پویا که در دستهٔ روش‌های صریح قرار دارد، از عملیات برداری برای تحلیل سازه و یافتن پاسخ دستگاه معادله‌های (۱) بهره می‌برد. این ویژگی سبب افزایش کارایی، کاهش حافظهٔ موردنیاز و سادگی محاسبه‌ها می‌گردد. روش رهایی پویا، براساس وجود یا عدم وجود میرایی، به‌ترتیب، در دو دستهٔ روش رهایی پویای لزج و جنبشی جا می‌گیرد. در روش رهایی پویای جنبشی، سازه به یک محیط دینامیکی مجازی (ساختگی)، که فاقد میرایی است، منتقل می‌شود. به‌دلیل نبودن نیروهای میرایی در این محیط دینامیکی مجازی، فرض پایستار بودن انرژی مکانیکی سازه برقرار است؛ زیرا همهٔ نیروهای موجود در این فضای دینامیکی مجازی (شامل نیروهای داخلی اعضا و نیروهای اینرسی)، پایستار می‌باشند. در روش رهایی پویای جنبشی از ویژگی پایستاری این سامانه دینامیکی مجازی استفاده می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که نقاط با بیشینه کارمایهٔ جنبشی در نزدیکی تعادل ایستا قرار می‌گیرند [1]. در فن رهایی پویای لزج، با فرض میرایی ساختگی برای سازه، سامانه از فضای ایستا به فضای پویای ساختگی منتقل می‌شود. به‌دلیل وجود میرایی ساختگی و عدم وجود بار پویا، پاسخ گذرا پس از مدتی از بین می‌رود و درنهایت پاسخ حالت پایدار دستگاه باقی می‌ماند. بنابراین، با انتقال سامانه از فضایی ایستا به پویا، رابطهٔ (۱)، به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$M^n\ddot{D}^n + C^n\dot{D}^n + S^nD^n = F^n = P^n \qquad (۲)$$

در این رابطه $M^n = [m_{ii}^n]$ و $C^n = [c_{ii}^n]$، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی، قطری و به ابعاد $q \times q$ می‌باشند. بالانویس n، نشان‌دهندهٔ شمارهٔ تکرار است. همچنین $\dot{D}$ و $\ddot{D}$، به‌ترتیب، بردارهای سرعت و شتاب سازه می‌باشند.

از سال ۱۹۶۵ که روش رهایی پویا توسط اتر [2] یا دی [3] معرفی گردید، تاکنون از این روش در حل مسائل

گوناگونی استفاده شده است. پژوهشگران بسیاری این روش را گسترش داده‌اند. این پژوهش‌ها را می‌توان در چند دسته جا داد.

در راستای استفاده از روش رهایی پویا در تحلیل سازه‌های مختلف، اتر این روش را برای محاسبهٔ تنش‌ها و تغییرمکان‌ها در یک مخزن تحت فشار به‌کار برد [4]. همچنین، وی توانست یک مسئلهٔ سه‌بعدی ارتجاعی-پلاستیک سد قوسی را بااستفاده از روش رهایی پویا حل کند [2]. برو و بروتون فن رهایی پویا را برای تحلیل خطی و غیرخطی قاب‌ها استفاده کردند [5]. آنها با مقایسهٔ راهکار رهایی پویا با روش‌های دیگر، برتری این روش را در تحلیل خطی و غیرخطی قاب‌ها اثبات نمودند. لویس و جونز باکمک روش رهایی پویا، به بررسی برهم کنش بین پوشش و شبکه در سقف‌های کابلی پیش‌تنیده پرداختند [6]. در سال‌های اخیر، کمت و همکارانش براساس تئوری خزش، روش رهایی پویای اصلاح‌شده‌ای برای تحلیل ایستا و غیرخطی گنبدهای کابلی، ارائه نمودند [7].

از فن رهایی پویا در تحلیل صفحات و پوسته‌ها بهره برده شده است. رشتن از آن، در تحلیل صفحات ارتجاعی که تحت بارگذاری جانبی هستند، بهره برد [8]. بر این اساس، تغییرشکل‌ها و لنگرهای ایجاد شده در صفحه، به‌دست می‌آیند. آلوار و راماچاندرا فن رهایی پویا را در مسئلهٔ تغییرشکل‌های بزرگ صفحات ایزوتروپیک به‌کار بردند [9]. رامش و کریشنامورتی با درنظر گرفتن تغییرشکل‌های بزرگ، دوران‌ها و کرنش‌های کوچک به تحلیل صفحات و پوسته‌ها با بهره‌گیری از روش رهایی پویا پرداختند [10]. بارنس توانست بااستفاده از روش رهایی پویا، فرایندی عددی برای پیش‌بینی رفتار کابل‌های با دهانهٔ زیاد و همچنین پوسته‌های شبکه‌ای و غشاهای پیش‌تنیده پیشنهاد دهد [11].

فن رهایی پویا در مسائل مربوط به کمانش و پس‌کمانش سازه‌ها به‌کار رفته است. رامش و کریشنامورتی بااستفاده از روش رهایی پویا، الگوریتم جدیدی برای تحلیل پس‌کمانشی ارتجاعی و غیرارتجاعی سازه‌های خرپایی پیشنهاد کردند [12]. برای تخمین باربحرانی در صفحات ارتجاعی که تحت اثر نیروهای درون‌صفحه‌ای می‌باشند، زانگ و کدخدایان رابطه‌هایی تقریبی ارائه کردند [13]. پارک و همکارانش براساس روش طول قوس و استفاده از فن رهایی پویای جنبشی، تعادل پس‌کمانشی سازه‌ها را بررسی نمودند [14].

الگوریتم‌های گوناگونی برای روش رهایی پویا ارائه شده است. همچنین، رابطه‌های مختلفی برای تخمین عامل‌های تکراری موجود در آن پیشنهاد گردیده است. بنس بااستفاده از ایدهٔ خود که استفاده از اصل ریلی و بردار نیروی تابع جرم بود، توانست تخمین مناسبی برای عامل میرایی بحرانی ارائه دهد [15]. کسل و هابز از تئوری گرشگورین برای تخمین عامل‌های متغیر در روش رهایی پویا بهره بردند [16]. بااستفاده از تحلیل خطا و نگرهٔ گرشگورین، پاپادراکاکیس فرایندی خودکار برای تخمین عامل‌های متغیر و تکراری روش رهایی پویا ارائه نمود [17]. برپایهٔ گسترش دنبالهٔ تیلور، پژند و حکاک رابطه‌هایی ارائه کردند که سبب کاهش تکرارها در روش رهایی پویا گردید [18]. توروی و همکارانش با کمینه‌سازی نیروی باقی‌مانده پس از هر تکرار، گام زمانی اصلاح‌شده‌ای ارائه نمودند [19]. رضایی‌پژند و علامتیان الگوریتم تصحیح‌شده‌ای براساس کمینه‌سازی خطای تغییرمکان بین دو تکرار پیاپی، پیشنهاد کردند [20]. رضایی‌پژند و سرافرازی الگوریتم جدیدی برای روش رهایی پویا پیشنهاد نمودند به‌گونه‌ای که نیازی به ماتریس میرایی و عامل‌های سرعت نداشت [21]. بااستفاده از فرایند تکراری استودولا و کمینه‌سازی خطا بین دو تکرار پیاپی، رضایی‌پژند و همکارانش روشی برای به‌دست آوردن جرم و میرایی ساختگی بهینه معرفی نمودند [22]. همچنین، رضایی‌پژند و همکارانش با کمینه‌کردن نیروی باقی‌مانده، توانستند گام زمانی جدیدی ارائه کنند [23]. علامتیان براساس اجرای تحلیل نموی، رابطهٔ جدیدی برای جرم ساختگی در الگوریتم روش رهایی

پویای جنبشی ارائه نمود که نرخ همگرایی را افزایش می‌داد [1].

در این مقاله، نخست رابطه‌سازی تکراری برای دست‌یابی به معادله‌های خطا در روش رهایی پویای لزج ارائه می‌گردند. سپس، با ترکیب نگرهٔ دایره‌های گرشگورین بهبودیافته، رابطهٔ نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج ارائه می‌گردد [1]. بر این اساس، الگوریتم جدیدی برای روش رهایی پویای لزج معرفی می‌گردد. درپایان، کارایی رابطه‌سازی و الگوریتم پیشنهادی، با تحلیل خطی و غیرخطی سازه‌های مختلف بررسی می‌شود.

رابطه‌های روش رهایی پویای لزج

روش رهایی پویا یک فرایند تابع اولیه‌گیری عددی است که برای یافتن پاسخ‌های دستگاه معادله (۱) به‌کار می‌رود. در این روش با داشتن داده‌ها در یک گام، کمیت‌های مجهول در گام بعدی به‌دست می‌آید. تابع اولیه‌گیری عددی بااستفاده از روش تفاوت‌های محدود مرکزی انجام می‌پذیرد. بر این اساس، شتاب درجهٔ آزادی i ام عبارت است از تغییر سرعت آن درجهٔ آزادی در بازهٔ زمانی بین دو نمو. کمیت تغییر سرعت درجهٔ آزادی i ام بین دو نمو زمانی به‌صورت $\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} - \dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}}$ می‌باشد. بازهٔ زمانی تغییر سرعت نیز میانگین دو گام زمانی پیاپی یعنی $\frac{\tau^n+\tau^{n+1}}{2}$ است. با تقسیم این دو کمیت بر یکدیگر، می‌توان نوشت:

$$\ddot{d}_i^n = \frac{2}{\tau^n+\tau^{n+1}}(\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} - \dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}}), \quad i=1,2,...,q \tag{۳}$$

در اینجا، τ^n و τ^{n+1}، به‌ترتیب، گام‌های زمانی n ام و $(n+1)$ام می‌باشند. از سوی دیگر، می‌توان بردار نیروی نامیزان را که برابر تفاوت نیروی خارجی و داخلی است، با بهره‌گیری از رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست آورد:

$$M^n\ddot{D}^n + C^n\dot{D}^n = P^n - F^n = R^n \tag{٤}$$

در اینجا، $R^n=\{r_i^n\}$، P^n و F^n، به‌ترتیب، بردارهای نیروی نامیزان، بار خارجی و نیروی داخلی وارد به سازه و به ابعاد $q\times 1$ می‌باشند. با جایگزینی رابطهٔ (۳) در (٤) و به‌دست آوردن $\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}}$، می‌توان نوشت:

$$\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} = \dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}} + (\frac{\tau^n+\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n})r_i^n - c_{ii}^n\dot{d}_i^n(\frac{\tau^n+\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}) \quad i=1,2,...,q \tag{۵}$$

بااستفاده از فرایند میانگین‌گیری سرعت‌ها و رابطهٔ (۵)، می‌توان نوشت:

$$\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}-\tau^n c_{ii}}{2m_{ii}+\tau^n c_{ii}}\dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{2m_{ii}+\tau^n c_{ii}}r_i^n \quad i=1,2,...,q \tag{٦}$$

شایان توجه است، ماتریس جرم در روش رهایی پویا قطری فرض شده است. درنتیجه، نیازی به محاسبهٔ وارون آن نیست. این نکته، سبب کاهش محاسبه‌ها می‌شود. در رابطه‌سازی روش رهایی پویا از فن تفاوت‌های محدود مرکزی استفاده می‌شود. براین اساس می‌توان نوشت:

$$d_i^{n+1} = d_i^n + \tau^{n+1}\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad i=1,2,...,q \tag{۷}$$

رابطهٔ (۷) را می‌توان به‌صورت برداری برای کل سازه نوشت:

$$D^{n+1} = D^n + \tau^{n+1}\dot{D}^{n+\frac{1}{2}} \tag{۸}$$

با بهره‌گیری از رابطه‌های (۵) و (۷)، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_i^{n+1}(1+\frac{c_{ii}^n\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}) = d_i^n(1+\frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}) + d_i^{n-1}(\frac{c_{ii}^n\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n} - \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}) + \frac{\tau^{n+1}(\tau^n+\tau^{n+1})}{2m_{ii}^n}r_i^n, \quad i=1,2,...,q \tag{۹}$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطهٔ (۹) می‌توان نوشت:

$$dd_i^{n+1}(1+\frac{c_{ii}^n\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}) = dd_i^n(1+\frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}) + dd_i^{n-1}(\frac{c_{ii}^n\tau^{n+1}}{2m_{ii}^n} - \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}) + \frac{\tau^{n+1}(\tau^n+\tau^{n+1})}{2m_{ii}^n}dr_i^n, \quad i=1,2,...,q \tag{۱۰}$$

در اینجا، $d(\,)$ به‌معنای دیفرانسیل می‌باشد. باید دانست، در رابطه‌سازی روش رهایی پویا، دیفرانسیل‌گیری در بازهٔ کلی همگرایی انجام نمی‌شود؛ بلکه، این فرایند در هر نمو زمانی انجام می‌پذیرد. در این راستا، کمیت‌های روش رهایی پویا شامل، جرم، میرایی و گام زمانی در هر نمو ثابت فرض می‌شوند و تنها پاسخ سازه تغییر می‌کند. این شیوه رابطه‌سازی به این دلیل انجام می‌شود که محیط دینامیکی در روش رهایی پویا ساختگی می‌باشد. بنابراین، برای سادگی هرچه بیشتر محاسبات و صریح شدن آنها، می‌توان انواع فرض‌ها را در این محیط دینامیکی مجازی اعمال کرد. این‌گونه است که فرض‌هایی مانند قطری‌بودن ماتریس‌های جرم و میرایی و نیز ثابت بودن کمیت‌ها در هر نمو زمانی معنی می‌یابند. به عبارت دیگر، در هر نمو از روش رهایی پویا، با ثابت پنداشتن کمیت‌های جرم، میرایی و گام زمانی، شرایطی را فراهم می‌آورند تا تغییرمکان سازه، در کوتاه‌ترین زمان ممکن، به پاسخ حالت پایدار (استاتیکی) همگرا شود. ازآنجاکه تغییرات بار خارجی در تکرارهای رهایی پویا صفر است، بنابراین $dp_i = 0$ و تغییرات نیروی نامیزان برابر است با:

$$dr_i^n = -df_i^n = -\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial f_i^n}{\partial d_j^n}\times dd_j^n = -\sum_{j=1}^{q}S_{ij}^n dd_j^n,\qquad (۱۱)$$

$i = 1, 2, \ldots, q$

که در آن، $\frac{\partial f_i^n}{\partial d_j^n} = S_{ij}$، برابر ij امین درایه ماتریس سختی مماسی سازه S می‌باشد. با خطی پنداشتن تغییرات نموی تغییرمکان بین دو تکرار پیاپی می‌توان نوشت:

$$dd_i^{n-1} = \frac{1}{k_i}dd_i^n \;\;,\;\; dd_i^{n+1} = k_i dd_i^n,\;\; i = 1, 2, \ldots, q \qquad (۱۲)$$

کمیت k_i، نسبت نمو تغییرمکان درجهٔ آزادی i ام و یا همان نمو خطای تغییرمکان است. باید دانست، خطا در گام nام به‌صورت $d_i^n - d_i^{Exact}$ تعریف می‌شود که در آن d_i^{Exact} پاسخ درجهٔ آزادی i ام است. با دیفرانسیل‌گیری از این خطا، نمو خطای تغییرمکان و نمو تغییرمکان با یکدیگر برابر خواهند شد؛ زیرا پاسخ دستگاه یگانه است و دیفرانسیل آن صفر می‌شود. برای تضمین پایداری روش، باید قدرمطلق نمو خطای تغییرمکان از یک کوچک‌تر باشد تا نمو تغییرمکان به صفر میل کند و سیستم به وضعیت ایستا برسد. با تعریف نسبت گام زمانی α، به‌صورت:

$$\alpha = \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\qquad (۱۳)$$

و بافرض قطری بودن ماتریس جرم ساختگی و انجام رابطه‌سازی براساس مقدار ویژه، می‌توان نوشت:

$$\frac{(\tau^n)^2\sum_{j=1}^{q}S_{ij}^n dd_j^n}{m_{ii}^n} = \lambda_i dd_i^n \qquad i=1,2,\ldots,q \qquad (۱۴)$$

که در آن، λ مقدار ویژهٔ ماتریس $(\tau^n)^2M^{-1}S$ یا همان مجذور فرکانس طبیعی سیستم پویای ساختگی می‌باشد [1]. با بهره‌گیری از رابطه‌های (۱٤) و (۱۲) در رابطهٔ (۱۰)، معادلهٔ درجهٔ دو زیر برای خطای تغییرمکان به‌دست می‌آید:

$$k_i^2\left(1+\frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n}\tau^{n+1}\right) - k_i\left(1+\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\lambda_i\right) - \frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n}\tau^{n+1} + \alpha = 0,\qquad (۱٥)$$

$i = 1, 2, \ldots, q$

براساس تعریف آندروود، رابطهٔ بین ماتریس میرایی و جرم ساختگی در گام nام، می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود [24]:

$$c_{ii}^n = c^n m_{ii}^n \;\;,\;\; C^n = c^n M^n \qquad i=1,2,\ldots,q \qquad (۱٦)$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ها، از تغییرمتغیر βاستفاده می‌شود:

$$\beta = \frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n}\tau^{n+1} = \frac{c^n}{2}\tau^{n+1},\quad i = 1, 2, \ldots, q \qquad (۱۷)$$

در این رابطه‌ها، c^n عامل میرایی در گام n ام می‌باشد. برای بررسی شرایط تضمین پایداری، نیاز به ریشهٔ معادلهٔ (۱٥) که همان خطای تغییرمکان است، می‌باشد. با ساده‌سازی به‌کمک رابطه‌های (۱٦) و (۱۷) و فرض $\tau^{n+1} = 1$، ریشهٔ معادلهٔ (۱٥) برابر است با:

$$k_i = \frac{\left(1+\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\lambda_i\right) \pm \sqrt{\Delta_i}}{2\left(1+\frac{c^n}{2}\tau^{n+1}\right)},\quad i = 1, 2, \ldots, q \qquad (۱۸)$$

همان‌طور که مشخص است، k_i تابعی است از α، λ_i و c^n. برای رسم نمودار تغییرات k_i، می‌توان یکی از دو مقدار c^n و λ_i را ثابت و دیگری را متغیر درنظر

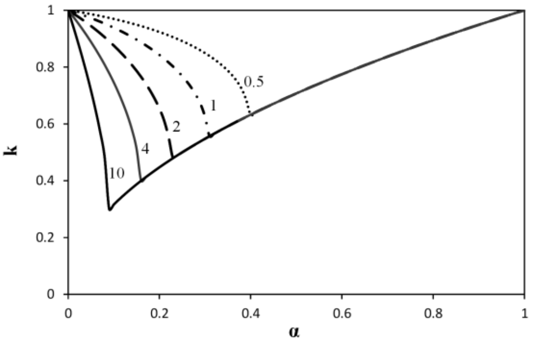
گرفت. اگر دلتای معادلهٔ (۱۵) مثبت باشد، دو ریشهٔ حقیقی وجود دارد. برای رسم نمودارها از مقدار بزرگ‌تر استفاده شده است. دلیل این موضوع این است که کاهش خطا در روش رهایی پویا نموی می‌باشد؛ درنتیجه، نمو خطای تغییرمکان به‌تدریج کاهش می‌یابد. ازاین‌رو، هنگامی‌که دو عامل برای نمو خطای تغییرمکان وجود داشته باشد، کمیت بزرگ‌تر حاکم خواهد بود به‌گونه‌ای که موقعیت جدید درجهٔ آزادی مورد نظر، به مکان قبلی‌اش، نزدیک‌تر باشد. اگر دلتا مساوی صفر و یا کوچکتر از صفر باشد، به ترتیب یک ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ مختلط وجود دارد.

شکل (۱)، تغییرات خطای تغییرمکان (k_i) را دربرابر نسبت گام زمانی α، برای $c^n = 0$ نشان می‌دهد. بر این اساس، خطای تغییرمکان k_i، زمانی کمینه می‌شود که دلتا برابر با صفر شود. در شکل (۱)، با کاهش مقدار ویژه، هر دو کمیت گام زمانی بهینه و خطای تغییرمکان افزایش می‌یابند. به‌عنوان نمونه، با افزایش مقدار ویژه از ٤ به ۱۰، مقدار نمو خطای تغییرمکان از حدود ۰/٤ به ۰/۳ کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، براساس تعریف مقدار ویژه که با رابطه (١٤) انجام شده است، مقدار ویژه و جرم با یکدیگر رابطهٔ وارون دارند؛ یعنی با افزایش مقدار ویژه، کمیت جرم کاهش می‌یابد. بنابراین، در هر درجهٔ آزادی، هرچه مقدار ویژه بزرگ‌تر شود، جرم ساختگی آن کمتر می‌گردد. درنتیجه، خطای تغییرمکان کوچک‌تر می‌شود. این نکته اهمیت درنظر گرفتن جرم ساختگی کمینه را برای درجه‌های آزادی نشان می‌دهد.

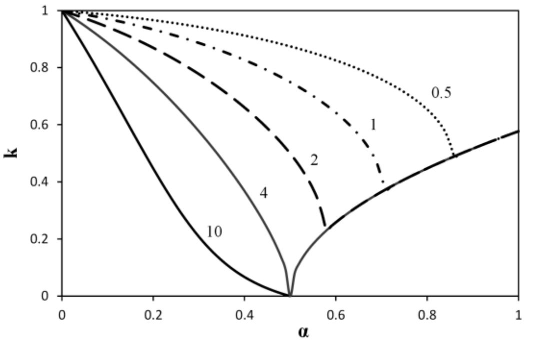
اگر مقدار ویژه برای درجهٔ آزادی iام متغیر و عامل میرایی ساختگی برابر با یک درنظر گرفته شود، شکل (۲) به‌دست می‌آید. همانند شکل (۱)، با کاهش مقدار ویژه، گام زمانی بهینه افزایش و خطای تغییرمکان بیشتر شده است.

چنانچه مقدار ویژه برای درجهٔ آزادی iام ثابت و برابر با یک، و عامل میرایی ساختگی متغیر درنظر گرفته شود، شکل (۳) در دسترس قرار می‌گیرد. در روش رهایی پویای لزج، دامنهٔ c^n یا عامل میرایی به‌صورت زیر است:

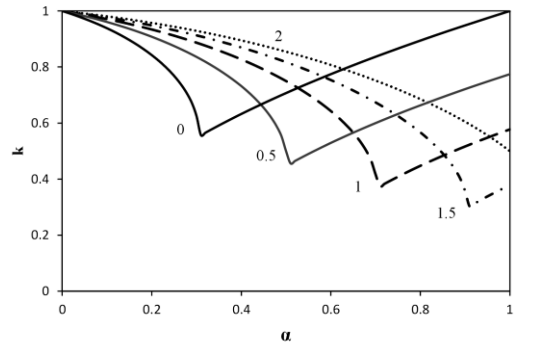
$$-2 \le c^n \le 2 \qquad (۱۹)$$



شکل ۱ تغییرات خطای تغییرمکان برای $c^n = 0$ و $0 \le \lambda_i \le 10$



شکل ۲ تغییرات خطای تغییرمکان برای $c^n = 1$ و $0 \le \lambda_i \le 10$



شکل ۳ تغییرات خطای تغییرمکان برای $0 \le c^n \le 2$ و $\lambda_i = 1$

شکل (۳) برای مقدارهای مثبت عامل میرایی رسم شده است. براساس شکل (۳)، با افزایش عامل میرایی ساختگی، نسبت گام زمانی بهینه افزایش و کمترین خطای تغییرمکان، کوچک‌تر می‌شود.

اکنون می‌توان شرط پایداری را به‌دست آورد. تکرارها هنگامی پایدار می‌باشند که دلتای رابطهٔ (۱۵) مساوی با صفر شود. با به‌دست آوردن مقدار ویژه(λ_i) از شرط پایداری ($\Delta_i = 0$)، می‌توان نوشت:

$$\lambda_i = \frac{2\left[(1+\alpha) \pm 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}{(\alpha)(1+\alpha)}, \quad i = 1, 2, ..., q \qquad (۲۰)$$

با جای‌گذاری λ_i از رابطهٔ (۲۰) در (۱۸)، نسبت نموی تغییرمکان‌ها به‌دست می‌آید:

$$k_i = \pm \frac{\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}}{(1+\beta)}, \quad i = 1, 2, ..., q \qquad (۲۱)$$

شرط لازم برای پایداری تکرارها این است که قدر مطلق خطای تغییرمکان همواره از یک کوچک‌تر باشد. بر این اساس، محدودهٔ زیر که در آن پایداری روش رهایی پویای لزج تضمین شود، به‌دست می‌آید:

$$\alpha < 1 + 2\beta \qquad (۲۲)$$

برای به‌دست آوردن مرزهای λ_i، از رابطهٔ (۲۰) استفاده می‌شود. بنابراین، محدودهٔ قابل قبول برای مقدارهای ویژهٔ سیستم پویای ساختگی که در آن پایداری روش تضمین می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$\frac{2\left[(1+\alpha) - 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}{(1+\alpha)} \le \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\lambda_i \le \frac{2\left[(1+\alpha) + 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}{(1+\alpha)}, \quad i = 1, 2, ..., q \qquad (۲۳)$$

نگره‌ی دایره‌های گرشگورین بهبودیافته

یکی از راه‌های تخمین مقدارهای ویژهٔ ماتریس‌ها، استفاده از نگرهٔ دایره‌های گرشگورین می‌باشد. در روش رهایی پویا مقدارهای ویژه، همان دوره‌های تناوب طبیعی دستگاه دینامیکی ساختگی می‌باشند [1]. بااستفاده از این نگره و درنظر گرفتن شرایط پایداری، می‌توان ماتریس جرم ساختگی را به‌دست آورد. این روش دارای پایه‌های ریاضی قوی است و سبب کاهش زمان محاسبات می‌شود. این نگره، مقدارهای ویژه ماتریس را به‌صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$\left|\lambda_i - \frac{(\tau^n)^2 S_{ii}}{m_{ii}^n}\right| \le \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., q \qquad (۲۴)$$

نگرهٔ دایره‌های گرشگورین یکی از برترین روش‌های تخمین مقدارهای ویژه ماتریس‌ها است. اما این نگره دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشد. در این راستا می‌توان به ارائهٔ مقدارهای منفی و یا صفر برای مقدارهای ویژهٔ ماتریس، اشاره کرد. علامتیان توانست با تقسیم نگرهٔ دایره‌های گرشگورین به سه محدودهٔ زیر، نقطهٔ ضعف نگرهٔ گرشگورین را برطرف کند [1]:

$$S_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ I:} \qquad (۲۵)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}| \le S_{ii} < \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ II:} \qquad (۲۶)$$

$$S_{ii} \le \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}|, \quad S_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ III:} \qquad (۲۷)$$

براساس نگرهٔ دایره‌های گرشگورین بهبود یافته، می‌توان مقدار ویژه ماتریس را به‌صورت زیر تخمین زد:

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\left[S_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}|\right] \le \lambda_i \le \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\sum_{j=1}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ I:} \qquad (۲۸)$$
$$i = 1, 2, ..., q$$

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{q}|S_{ij}| - S_{ii}\right] \le \lambda_i \le \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\sum_{j=1}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ II:} \qquad (۲۹)$$
$$i = 1, 2, ..., q$$

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}S_{ii} \le \lambda_i \le \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n}\sum_{j=1}^{q}|S_{ij}| \qquad \text{محدودهٔ III:} \qquad (۳۰)$$
$$i = 1, 2, ..., q$$

ازآنجاکه لازم است رابطه‌های (۲۸)، (۲۹) و (۳۰)، شرط مرزی (۲۳) را برقرار کنند، محدودهٔ زیر برای جرم

ساختگی به‌دست می‌آید:

محدودهٔ I:

$$\frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)+2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\sum_{j=1}^{q}\left|S_{ij}\right| \le m_{ii}^{n} \le \frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)-2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\left[S_{ii}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\left|S_{ij}\right|\right] \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۱}$$

محدودهٔ II:

$$\frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)+2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\sum_{j=1}^{q}\left|S_{ij}\right| \le m_{ii}^{n} \le \frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)-2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\left|S_{ij}\right|-S_{ii}\right] \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۲}$$

محدود III:

$$\frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)+2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\sum_{j=1}^{q}\left|S_{ij}\right| \le m_{ii}^{n} \le \frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)-2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}S_{ii} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۳}$$

استفاده از کمترین مقدار جرم ساختگی، سبب ایجاد کمینه نیروی نامیزان می‌شود. بنابراین، مرزهای پایینی رابطه‌های (۳۱)، (۳۲) و (۳۳)، برای تعیین جرم ساختگی به‌کار می‌روند. باتوجه به برابری مرزهای پایینی این سه رابطه، مقدار جرم ساختگی پیشنهادی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m_{ii}^{n}=\frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2\left[(1+\alpha)+2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}\right]}\sum_{j=1}^{q}\left|S_{ij}\right| \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۴}$$

برای سنجش پایداری روش رهایی پویا، باید مرزهای بالایی رابطه‌های (۳۱)، (۳۲) و (۳۳)، از مرزهای پایینی آنها بزرگ‌تر باشند. براین اساس، نابرابری‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\gamma_i\alpha-2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}+\gamma_i\le 0 \qquad i=1,2,\dots,q \qquad \text{محدودهٔ I:} \tag{۳۵}$$

$$\alpha-2\gamma_i\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}+1\le 0 \qquad i=1,2,\dots,q \qquad \text{محدودهٔ II:} \tag{۳۶}$$

$$\gamma_i\alpha-2(2+\gamma_i)\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}+\gamma_i\le 0 \qquad i=1,2,\dots,q \qquad \text{محدودهٔ III:} \tag{۳۷}$$

در رابطه‌ها، کمیت γ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_i=\frac{\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{q}\left|S_{ij}\right|}{S_{ii}} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۸}$$

با حل سه معادلهٔ (۳۵)، (۳٦) و (۳۷)، محدودهٔ نسبت گام زمانی(α)، به‌دست می‌آید. این نابرابری‌ها، محدودهٔ پذیرفتنی برای نسبت گام زمانی را که در آن پایداری روش تضمین می‌شود، ارائه می‌دهند:

$$\frac{2+2\beta-\gamma_i^2-2(1+\beta)\sqrt{1-\gamma_i^2}}{\gamma_i^2}\le\alpha \le\frac{2+2\beta-\gamma_i^2+2(1+\beta)\sqrt{1-\gamma_i^2}}{\gamma_i^2} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{۳۹}$$

برای محدودهٔ I

$$-1+2\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2-2(1+\beta)\gamma_i\sqrt{1-\gamma_i^2} \le\alpha\le -1+2\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2+2(1+\beta)\gamma_i\sqrt{\gamma_i^2-1} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{٤٠}$$

برای محدودهٔ II

$$\frac{8+8\beta+8\gamma_i+8\beta\gamma_i+\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2-4(1+\beta)\sqrt{\gamma_i^3+5\gamma_i^2+8\gamma_i+4}}{\gamma_i^2}\le\alpha\le \frac{8+8\beta+8\gamma_i+8\beta\gamma_i+\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2+4(1+\beta)\sqrt{\gamma_i^3+5\gamma_i^2+8\gamma_i+4}}{\gamma_i^2} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{٤١}$$

برای محدودهٔ III

برای افزایش نرخ همگرایی، از کمترین مقدار به‌دست‌آمده از رابطه‌های (۳۹)، (٤٠) و (٤١)، استفاده می‌شود:

$$\alpha=\underset{i}{\mathrm{Min}}\begin{cases}\dfrac{2+2\beta-\gamma_i^2-2(1+\beta)\sqrt{1-\gamma_i^2}}{\gamma_i^2} & \text{محدوده I}\\[2ex] -1+2\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2-2(1+\beta)\gamma_i\sqrt{1-\gamma_i^2} & \text{محدوده II}\\[2ex] \dfrac{8+8\beta+8\gamma_i+8\beta\gamma_i+\gamma_i^2+2\beta\gamma_i^2-4(1+\beta)\sqrt{\gamma_i^3+5\gamma_i^2+8\gamma_i+4}}{\gamma_i^2} & \text{III ده}\end{cases} \qquad i=1,2,\dots,q \tag{٤٢}$$

نسبت گام زمانی در روش رهایی پویا از اهمیت بالایی برخوردار است؛ زیرا، این نسبت برای همه درجه-های آزادی سازه یکسان است و اثر مستقیمی بر نرخ همگرایی روش رهایی پویا دارد. براساس رابطهٔ (٤٢)، نسبت گام زمانی تابعی از عامل میرایی ساختگی (c^n) است. بنابراین، در هر تکرار رهایی پویا، این نسبت متغیر می‌باشد. با به‌دست آوردن نسبت گام زمانی (α) از رابطهٔ

(٤٢)، می‌توان جرم ساختگی پیشنهادی را برای همهٔ درجه‌های آزادی سازه از رابطهٔ (٣٤) به‌دست آورد. در حالت خاص، اگر میرایی ساختگی صفر درنظر گرفته شود، آنگاه $\beta = 0$ می‌گردد. درنتیجه، رابطهٔ (٣٤) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$m_{ii}^{n} = \frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^{n}}{2(1+\sqrt{\alpha})^{2}} \sum_{j=1}^{q} \left|S_{ij}\right| \quad i = 1, 2, ..., q \tag{٤٣}$$

رابطهٔ بالا با عبارت ارائه‌شده در مرجع [1] برای جرم ساختگی روش رهایی پویای جنبشی مطابقت دارد. بنابراین، رابطه‌سازی‌های انجام‌شده صحیح می‌باشند. شایان توجه است، نابرابری (٣٤)، رابطهٔ نوینی را برای محاسبهٔ جرم ساختگی روش رهایی پویای لزج ارائه می‌دهد. در اینجا، برای میرایی ساختگی از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود [20]:

$$c_{ii} = \sqrt{\frac{(\{D\}^{n})^{T}\{f\}^{n}}{(\{D\}^{n})^{T}[M]^{n}\{D\}^{n}}\left[4-(\tau^{n})^{2}\frac{(\{D\}^{n})^{T}\{f\}^{n}}{(\{D\}^{n})^{T}[M]^{n}\{D\}^{n}}\right]}\, m_{ii} \tag{٤٤}$$

$$i = 1, 2, ..., q$$

الگوریتم رهایی پویای لزج

در بخش قبلی، با بهره‌گیری از نگرهٔ دایره‌های گرشگورین بهبودیافته و بررسی پایداری عددی، رابطهٔ نوینی برای جرم ساختگی روش رهایی پویای لزج به‌دست آمد (رابطهٔ ٣٤). اکنون، الگوریتم روش رهایی پویا براساس رابطه‌سازی پیشنهادی ارائه می‌گردد. باید دانست، سنجش همگرایی در تکراهای رهایی پویا با دو معیار نیروی نامیزان و کارمایهٔ جنبشی انجام می‌پذیرد. به سخن دیگر، تکرارها تا آنجایی انجام می‌شوند که یکی از خطاهای نیروی نامیزان و یا کارمایه جنبشی، از معیار همگرایی کوچک‌تر شود. الگوریتم پیشنهادی برای روش رهایی پویای لزج به‌صورت زیر است:

١. فرض مقدارهای اولیه برای سرعت (بردار صفر)، تغییرمکان (بردار صفر یا در صورت موجود بودن، تغییرمکان همگراشده در نموی قبل)، گام زمانی ساختگی و نسبت آن ($\alpha = \tau = 1$) و معیار همگرایی برای نیروی نامیزان و کارمایهٔ جنبشی ($e_R = 1.0E-6$ و $e_K = 1.0E-12$).

٢. اگر $c^{n} \neq 0$، در این‌صورت α برابر است با کمترین نسبت گام زمانی (α) به‌دست‌آمده از رابطهٔ (٤٢). در غیر این‌صورت $\alpha = 1$ می‌باشد.

٣. ساخت ماتریس سختی مماسی و بردار نیروی داخلی.

٤. اعمال شرایط مرزی.

٥. محاسبهٔ نیروی نامیزان بااستفاده از رابطهٔ (٤).

٦. اگر $\sqrt{\sum_{i=1}^{q}(r_i^{n})^{2}} \leq e_R$ تحلیل به گام (١٤) می‌رود، در غیر این‌صورت ادامه داده می‌شود.

٧. ساخت ماتریس جرم ساختگی از رابطهٔ پیشنهادی (٣٤).

٨. ایجاد ماتریس میرایی ساختگی بااستفاده از رابطهٔ (٤٤).

٩. به‌هنگام‌سازی بردار سرعت ساختگی بااستفاده از رابطهٔ (٦).

١٠. $\tau^{n+1} = \alpha\tau^{n}$

١١. اگر $\sum_{i=1}^{q}(\dot{D}_i^{n+1/2})^{2} \leq e_K$ تحلیل به گام (١٤) می‌رود، در غیر این‌صورت ادامه داده می‌شود.

١٢. بهنگام‌سازی بردار تغییرمکان بااستفاده از رابطهٔ (٨).

١٣. افزایش شمارندهٔ تکرار $n = n+1$

١٤. نتایج همین نمو چاپ می‌شود.

١٥. اگر تعداد تکرارها کافی نبود، تحلیل به گام (١) باز می‌گردد، در غیر این‌صورت تحلیل پایان می‌یابد.

همان طور که مشخص است، در الگوریتم پیشنهادی، نسبت گام زمانی بهینه در هرگام به‌صورت خودکار انتخاب می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که در آغاز هر نمو، نسبت گام زمانی برابر با یک فرض می‌شود. با این مقدار و فرض گام زمانی برابر با یک، نسبت گام زمانی بهینه از رابطهٔ (٤٢) به‌دست می‌آید. بنابراین، نسبت گام زمانی در الگوریتم پیشنهادی به‌صورت نسبی تغییر می‌کند.

نمونه‌های عددی

برای بررسی کارایی راهکار پیشنهادی، نویسندگان برنامهٔ رایانه‌ای در نرم‌افزار متلب (MATLAB) نوشته‌اند. این برنامه براساس الگوریتم پیشنهادی کار می‌کند و از آن برای تحلیل خطی و غیرخطی هندسی سازه‌های مختلف مانند خرپا و قاب‌های دو و سه‌بعدی در محدودهٔ رفتار

ارتجاعی استفاده می‌گردد. تحلیل غیرخطی بااستفاده از رابطه‌های اجزای محدود و براساس مختصات هم-چرخشی انجام می‌گردد [25]. هر یک از نمونه‌ها به سه روش تحلیل شده‌اند. تفاوت این روش‌ها در رابطهٔ استفاده‌شده برای جرم ساختگی می‌باشد. با این فرایند، کارایی رابطهٔ پیشنهادی برای جرم ساختگی مشخص می-شود. در هر سه روش، از رابطهٔ (٤٤) برای محاسبهٔ عامل میرایی ساختگی در تکرارهای رهایی پویای لزج، بهره گرفته شده است.

در روش نخست که همان راهکار پیشنهادی است، از رابطهٔ پیشنهادی (٣٤)، برای جرم ساختگی استفاده شده است. روش پیشنهادی به اختصار، mgDR (Modified Gerschgörin Dynamic Relaxation) نامیده می‌شود. در دومین روش که mdDR (Modified mass and damping Dynamic Relaxation) نام دارد، جرم ساختگی براساس رابطهٔ رضایی‌پژند و علامتیان محاسبه می‌گردد [20]:

$$m_{ii}^{n} = \text{MAX}[\ \frac{(\tau^{n})^{2}}{2} S_{ii}\ ,\ \frac{(\tau^{n})^{2}}{4} \sum_{j=1}^{q} |S_{ij}|\ ] \qquad (٤٥)$$

$$i = 1, 2, \ldots, q$$

در سومین شیوه، از رابطهٔ جرم ساختگی آندروود استفاده شده است [24]. راهکار آندروود به‌عنوان متداول‌ترین روش رهایی پویا oDR (Ordinary Dynamic Relaxation) شناخته می‌شود. رابطهٔ جرم ساختگی در روش oDR به‌صورت زیر است:

$$m_{ii}^{n} = 1.1 \times \frac{(\tau^{n})^{2}}{4} \sum_{j=1}^{q} |S_{ij}| \qquad (٤٦)$$

$$i = 1, 2, \ldots, q$$

کارایی و نرخ همگرایی فرایند پیشنهادی (mgDR)، از مقایسهٔ تکرارهای همگرایی این روش با دو شیوهٔ oDR و mdDR، بررسی می‌گردد.

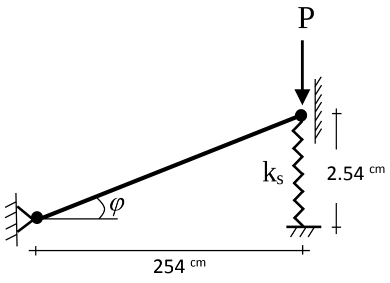
نمونهٔ ۱: خرپای فنری. این سازه، سازه‌ای تک درجهٔ آزادی و ترکیبی از فنر و یک عضو خرپایی است که در شکل (٤) نشان داده شده است [20]. سختی فنر و صلبیت محوری عضو فولادی به‌ترتیب برابرند با؛ 10.51 نیوتن بر سانتی متر و 44483985.77 نیوتن. ازآنجاکه رفتار این سازه غیرخطی است، از رابطه‌های زیر برای به‌دست آوردن نیروی داخلی و سختی مماسی سازهٔ مزبور استفاده می‌شود [24]:

$$f(D) = 0.5\ AE(\cos^{2}\varphi)\ (\frac{D}{L_0})^{2}\ [\frac{D}{L_0}\cos^{2}\varphi - 3\sin\varphi] + k_s D + (AE\frac{D}{L_0})\sin^{2}\varphi \qquad (٤٧)$$

$$S_T = 1.5\ AE(\cos^{2}\varphi)\ [\frac{D}{L_0}\cos^{2}\varphi - 2\sin\varphi]\ (\frac{D}{L_0^{2}}) + k_s + \frac{AE\sin^{2}\varphi}{L_0} \qquad (٤٨)$$

بار واردشده به این سازه در12 گام به آن اعمال می-شود؛ به‌گونه‌ای که افزایش بار در هر نمو برابر با4.4484 نیوتن می‌باشد. شکل (٥) نمودار بار– تغییرمکان این سازه را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در جدول (١) درج شده‌اند.

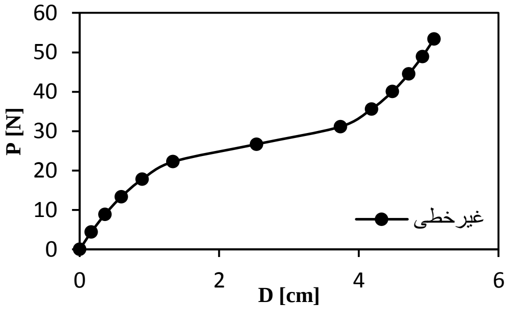
جدول (١) نشان می‌دهد رابطه‌سازی پیشنهادی سبب افزایش نرخ همگرایی روش رهایی پویا شده است؛ به‌گونه‌ای که تعداد تکرارهای همگرایی روش پیشنهادی mgDR کمتر از دیگر الگوریتم‌های متداول (mdDR و oDR) می‌باشد. درنتیجه، رابطه‌سازی پیشنهادی سبب افزایش نرخ همگرایی روش رهایی پویا و کاهش زمان محاسبه‌ها شده است.



شکل ٤ خرپای فنری

جدول ۱ تعداد تکرارهای همگرایی خرپای فنری

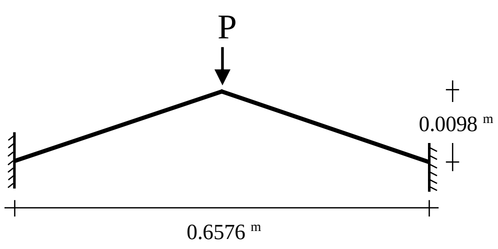
تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری												مجموع تکرارها	بهبود همگرایی(٪)	
		۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲		$\frac{oDR-mdDR}{oDR}$	$\frac{oDR-mgDR}{oDR}$
غیر خطی	oDR	۷٤	۷۸	۸٤	۹۳	۱۱۱	۱۷۹	۷۵	۵۸	۵۱	٤٦	٤۳	٤۱	۹۳۳	۸۷,٦۷	۹۳,۸۹
	mdDR	٦	۷	۷	۱۳	٦	٤	۹	۱۰	۱۲	۱۳	۱٤	۱٤	۱۱۵		
	mgDR	٦	٤	٤	٤	۵	٦	۷	۵	٤	٤	٤	٤	۵۷		



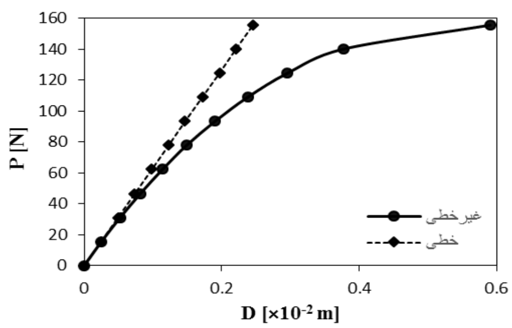
شکل ۵ مسیر ایستایی خرپای فنری

*نمونهٔ ۲: **قاب توگل***. مطابق شکل (٦)، این قاب از دو عضو(چوبی) با مدول الاستیسیته، سطح مقطع و ممان اینرسی، به‌ترتیب برابر با 0.71×10^{11} نیوتن بر مترمربع، 1.181×10^{-4} مترمربع و 0.0375×10^{-8} متر به توان چهار، ساخته شده است [22]. بار کلی وارد به این سازه برابر با 155.605 نیوتن است که در ده مرحله به سازه اعمال می‌گردد. برای مدل‌سازی اجزای محدود، هر عضو این قاب به پنج جزء تقسیم شده است. شکل (۷)، مسیر ایستایی این سازه را برای تغییرمکان عمودی گره میانی و در دو حالت تحلیل خطی و غیرخطی نشان می‌دهد. در جدول (۲)، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی سه روش آورده شده است.

داده‌های جدول (۲) نشان می‌دهد روش پیشنهادی mgDR با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به شیوه‌های mdDR و oDR به پاسخ همگرا شده است. این بهبود، سبب کاهش زمان محاسبه‌ها و هزینهٔ تحلیل می‌شود.



شکل ٦ قاب توگل



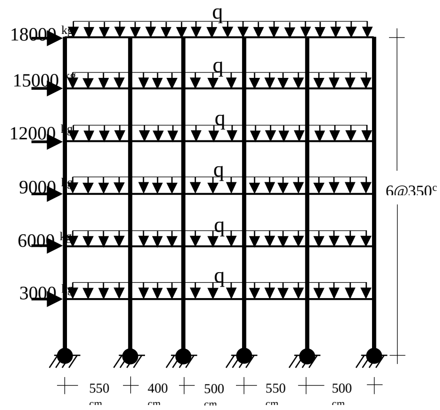
شکل ۷ مسیر ایستایی قاب توگل

جدول ۲ تعداد تکرارهای همگرایی قاب توگل

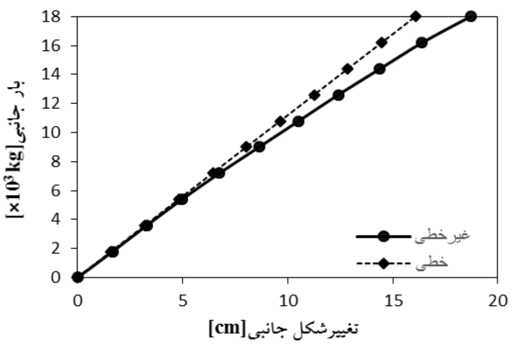
تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										مجموع تکراره	بهبود همگرایی(٪)	
		۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰		$\frac{oDR-mdDR}{oDR}$	$\frac{oDR-mgDR}{oDR}$
خطی	oDR	۱۹٦۲	۱۸۱۷	۱۸۰٤	۱۷۹۹	۱۷۹٦	۱۷۹٤	۱۷۹۳	۱۷۹۲	۱۷۹۲	۱۷۹۱	۱۸۱٤۰	۳,۹۱	٦۱,٤۰
	mdDR	۱۸۸۱	۱۷٤٦	۱۷۳٤	۱۷۲۹	۱۷۲٦	۱۷۲٥	۱۷۲۳	۱۷۲۳	۱۷۲۲	۱۷۲۲	۱۷٤۳۱		
	mgDR	۷٤۷	۷۰۱	٦۹۷	٦۹٥	٦۹٥	٦۹٤	٦۹٤	٦۹۳	٦۹۳	٦۹۳	۷۰۰۲		
غیر خطی	oDR	۲۰۲۹	۱۹۸٦	۲۰۹٥	۲۲٤۲	۲٤۳٤	۲٦۹۸	۳۰۸۳	۳۷۲٤	٥۱۱٤	۲۸۰۱۸	٥۳٤۲۳	۲,۹۰	٤٥,۸۳
	mdDR	۱۹٤٦	۱۹۰۸	۲۰۱۳	۲۱٥٤	۲۳۳۹	۲٥۹۲	۲۹٦۳	۳٥۷۸	٤۹۱٦	۲۷٤٦۳	٥۱۸۷۲		
	mgDR	۷۷۳	۷٦۳	۸۰٤	۸٥۸	۹۲۹	۱۰۲٥	۱۱٦۷	۱٤۰۳	۱۹۲۳	۱۹۲۹۲	۲۸۹۳۷		

جدول ۳ تعداد تکرارهای همگرایی قاب ساختمانی

تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										مجموع تکرارها	بهبود همگرایی(٪)	
		۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰		$\frac{oDR-mdDR}{oDR}$	$\frac{oDR-mgDR}{oDR}$
خطی	oDR	٥۰٦۳۱۹	٤۸۰٦٦٥	٤۸۰۳۹۷	٤۸۰۲۹۹	٤۸۰۲٤٦	٤۸۰۲۱٥	٤۸۰۱۹۳	٤۸۰۱۷۹	٤۸۰۱٦۷	٤۸۰۱٦۰	٤۸۲۸۸٤۰	٤,۳٦	٦۸,۰۲
	mdDR	٤۸٤۰۲٦	٤٥۹۷۳٥	٤٥۹٤۸۰	٤٥۹۳۸٦	٤٥۹۳۳۸	٤٥۹۳۰۷	٤٥۹۲۸٦	٤٥۹۲۷۲	٤٥۹۲٦۲	٤٥۹۲٥۱	٤٦۱۸۳٤۳		
	mgDR	۱٦۱۲۹۹	۱٥۳۷۷۷	۱٥۳٦۹٦	۱٥۳٦٦۹	۱٥۳٦٥۲	۱٥۳٦٤٥	۱٥۳٦۳٦	۱٥۳٦۳۲	۱٥۳٦۳۲	۱٥۳٦۲٤	۱٥٤٤۲٦۲		
غیر خطی	oDR	٤۱٥٥٥	۳٥۹۸٦	۳٥۳٦۰	۳٥۰۲٦	۳٤۷۸٤	۳٤٦۳٥	۳٤٥۱۸	۳٤٤۱۷	۳٤۳۲۸	۳٤۲٤۸	۳٥٤۸٥۷	٤,۳۰	٦۷,٥۹
	mdDR	۳۹۷۱۸	۳٤٤٤۱	۳۳۸٤٤	۳۳٥۲٥	۳۳۲۹٤	۳۳۱٥۲	۳۳۰٤۰	۳۲۹٤٤	۳۲۸٥۹	۳۲۷۸۳	۳۳۹٦۰۰		
	mgDR	۱۳۲۷٤	۱۱۷۱٥	۱۱٥۱۸	۱۱٤۰٤	۱۱۳۱۸	۱۱۲٥٤	۱۱۱۹۹	۱۱۱٤۹	۱۱۱۰۳	۱۱۰٦۰	۱۱٤۹۹٤		



شکل ۸ قاب ساختمانی



شکل ۹ مسیر ایستایی قاب ساختمانی

*نمونهٔ ۳: **قاب ساختمانی***. در این نمونه، یک قاب ساختمانی که در شکل (۸) نشان داده شده است، تحلیل می‌گردد [20]. این قاب ساختمانی دارای ٦ طبقه است. ستون‌های سه طبقهٔ نخست و دوم این ساختمان از مقاطع W18×40 و W18×35، و کلیهٔ تیرهای این ساختمان از مقطع W16×31 ساخته شده‌اند. به‌عنوان تقریبی از بار مرده و زنده، نیروی گستردهٔ یکنواخت٥۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر، به کف هر طبقه از ساختمان اعمال می‌گردد. همان‌طور که در شکل (۸) نشان داده شده است، نیروی جانبی معادل با نیروی برش پایهٔ زلزله، به‌صورت افقی به هر طبقه از ساختمان وارد می‌شود. نمودار نیرو-تغییرمکان در شکل (۹)، برای تغییرمکان طبقهٔ آخر این ساختمان و در دوحالت تحلیل خطی و غیرخطی رسم شده است. جدول (۳)، تعداد تکرارهای تحلیل خطی و غیرخطی این سازه را نشان می‌دهد.

*نمونهٔ ٤ : **خرپای دوبعدی*** . برای سنجش بهتر راهکار پیشنهادی، یک خرپای دوبعدی که ۲۹ عضو و ۲۰ درجهٔ آزادی دارد و در شکل (۱۰) نشان داده شده است، تحلیل می‌گردد [26]. برای این سازه، $EA=6.3\times10^{7}$ نیوتن،

$h = 0.9144$ متر و نیروی P برابر 3×10^6 نیوتن می‌باشد. بار کلی در ده مرحله به سازه اعمال شده است.

جدول (٤)، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی هر یک از روش‌ها را در دوحالت تحلیل خطی و غیرخطی مشخص می‌کند. نتایج جدول (٤) نشان می‌دهد همگرایی روش پیشنهادی mgDR بیشتر از دیگر شیوه‌ها (mdDR و oDR) می‌باشد به‌گونه‌ای که با تعداد تکرار کمتر پاسخ به‌دست می‌آید.

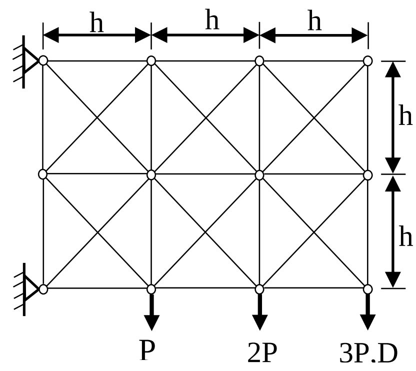
نمونهٔ ٥: برج خرپایی. شکل (١٢) برج خرپایی ٣٠طبقه را نشان می‌دهد. بااستفاده از الگوریتم‌های مختلف روش رهایی پویای لزج، این سازه در حالت‌های خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می‌گردد [1]. این سازه دارای ٣٦٠ درجهٔ آزادی و ٥٤٠ عضو است. سطح مقطع و مدول الاستیسیتهٔ هر عضو، به‌ترتیب، برابر با 64.516 سانتی‌مترمربع و 6.895×10^4 مگاپاسکال می‌باشد. دو نوع بار به این سازه وارد می‌شود؛ یکی بار ثقلی 20 کیلونیوتن به همهٔ گره‌های بالاترین طبقه و دیگری بار جانبی باد که با رابطهٔ زیر به گره‌های هر طبقه از سازه اثر می‌کند:

$$p_i^x = -900\left(\frac{Z_i}{5340}\right)^2 + 1900\frac{Z_i}{5340} \qquad (٤٩)$$
$$i = 1, 2, ..., 30N$$

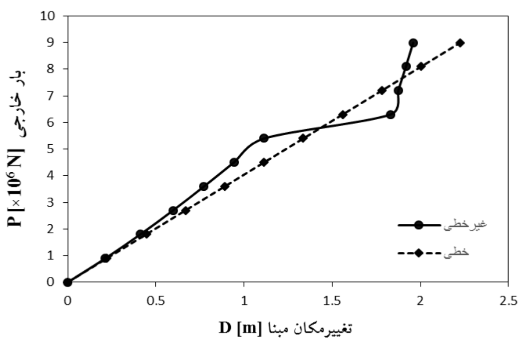
در این رابطه، Z_i، ارتفاع طبقهٔ مورد نظر نسبت به تراز تکیه‌گاه می‌باشد. این سازه در دو حالت کشسان خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می‌گردد. شکل (١٣) مسیر ایستایی تغییرمکان افقی بالای این سازه را نشان می‌دهد. همچنین، تعداد تکرارهای همگرایی این سازه با الگوریتم‌های مختلف روش رهایی پویا در جدول (٥) درج شده‌اند.

جدول ٤ تعداد تکرارهای همگرایی خرپای دو بعدی

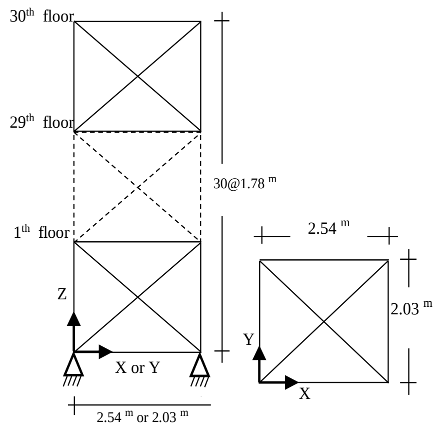
تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	مجموع تکرارها	بهبود همگرایی(٪) $\frac{oDR-mdDR}{oDR}$	بهبود همگرایی(٪) $\frac{oDR-mgDR}{oDR}$
خطی	oDR	٣٦٢٥	٣٦١٠	٣٦٠٤	٣٦٠٢	٣٦٠١	٣٦٠٠	٣٦٠٠	٣٦٠٠	٣٥٩٩	٣٥٩٩	٣٦٠٤٠	٥,٢٢	٨٢,٨١
	mdDR	٣٤٢٩	٣٤٢٢	٣٤١٧	٣٤١٥	٣٤١٤	٣٤١٣	٣٤١٣	٣٤١٢	٣٤١٢	٣٤١٢	٣٤١٥٩		
	mgDR	٦٢٤	٦٢٠	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩	٦١٩٦		
غیر خطی	oDR	١١٤٦	١٢٢٩	١٥١١	١٦٨٤	١٩٢٨	٢٤٧٤	٤٩٦٧	٧٩٦	٧٩٢	٧٨٦	١٧٣١٣	٥,١٥	٧٠,٦٣
	mdDR	١٠٨٣	١١٦٥	١٤٣٢	١٥٩٧	١٨٢٩	٢٣٤٧	٤٧٠٥	٧٥٩	٧٥٥	٧٤٩	١٦٤٢١		
	mgDR	٣٧٣	٣٩٢	٤٤٧	٤٩١	٥٦١	٧٢٥	١٣٧١	٢٤٣	٢٤٢	٢٤٠	٥٠٨٥		



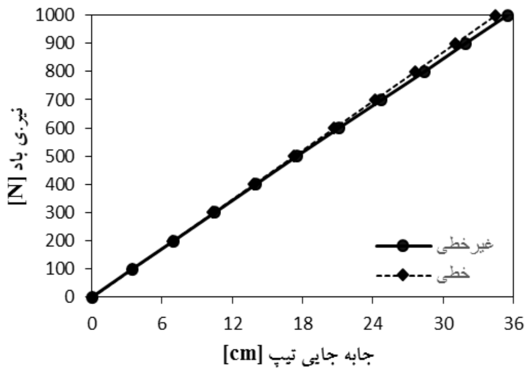
شکل ١٠ خرپای دو بعدی



شکل ١١ مسیر ایستایی خرپای دو بعدی



شکل ۱۲ برج خرپایی



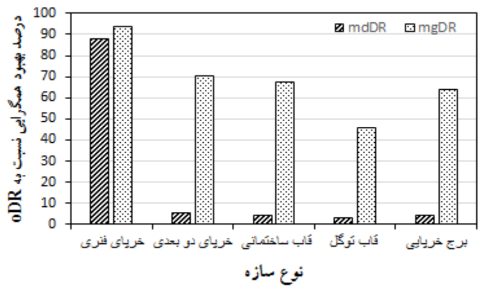
شکل ۱۳ مسیر ایستایی برج خرپایی

جدول ۵ تعداد تکرارهای همگرایی برج خرپایی

تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری ۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	مجموع تکرارها	بهبود همگرایی(٪) $\frac{oDR - mdDR}{oDR}$	$\frac{oDR - mgDR}{oDR}$
خطی	oDR	۸۹۹۲۸	۸۵۵۱۸	۸۵٤۳۹	۸۵٤۱۰	۸۵۳۹۵	۸۵۳۸۵	۸۵۳۷۹	۸۵۳۷۵	۸۵۳۷۱	۸۵۳٦۱	۸۵۸۵٦۱	٤,۲۲	٦۳,۹۰
	mdDR	۸٦۱۰۵	۸۱۹۱۱	۸۱۸۳۵	۸۱۸۰۸	۸۱۷۹۳	۸۱۷۸٤	۸۱۷۷۹	۸۱۷۷٤	۸۱۷۷۱	۸۱۷٦۸	۸۲۲۳۲۸		
	mgDR	۳۲۳۰٤	۳۰۸۸۷	۳۰۸٦۱	۳۰۸۵۲	۳۰۸٤۷	۳۰۸٤٤	۳۰۸٤۲	۳۰۸٤۰	۳۰۸۳۹	۳۰۸۳۸	۳۰۹۹۵٤		
غیر خطی	oDR	۹۰۱٦۸	۸٦۰۲۹	۸٦۲۲۲	۸٦۵۸۰	۸٦۹۷۰	۸۷۳٦۹	۸۷۷۷۵	۸۸۱۸۷	۸۸٦۰۳	۸۹۰۲٤	۸۷٦۹۲۷	٤,۲۲	٦۳,۹۹
	mdDR	۸٦۳۳۵	۸۲٤۰۰	۸۲۵۸٦	۸۲۹۲۸	۸۳۳۰۲	۸۳٦۸٤	۸٤۰۷۳	۸٤٤٦۷	۸٤۸٦٦	۸۵۲٦۹	۸۳۹۹۱۰		
	mgDR	۳۲۳۸٦	۳۱۰٦۰	۳۱۱۲٦	۳۱۲۳۵	۳۱۳۵۱	۳۱٤۷۱	۳۱۵۹۳	۳۱۷۱٦	۳۱۸٤۰	۳۱۹٦٦	۳۱۵۷٤٤		

باتوجه به شمار تکرارهای جدول (۵) می‌توان دریافت در هر دو تحلیل خطی و غیرخطی، نرخ همگرایی روش پیشنهادی mgDR بیشتر از دیگر راهکارها (mdDR و oDR) می‌باشد. به سخن دیگر، راهکار پیشنهادی دارای کارایی بسیار مناسب در تحلیل سازه‌های بزرگ با تعداد زیاد درجهٔ آزادی می‌باشد.

از سوی دیگر، درصد بهبود همگرایی روش رهایی پویای پیشنهادی (mgDR) و شیوهٔ mdDR درمقایسه با فرایند oDR، برای همهٔ نمونه‌های عددی در شکل (۱٤) رسم شده است. شکل (۱٤) برتری نرخ همگرایی شیوهٔ پیشنهادی را برای تحلیل انواع سازه‌ها شامل خرپا و قاب-های دو و سه‌بعدی نشان می‌دهد. شایان توجه است، در نمونهٔ ۱ (خرپای فنری) که سازه یک درجه آزادی دارد، نسبت گام زمانی تکرارهای رهایی پویا برابر با یک درنظر گرفته شده است. در نمونه‌های دیگر، نسبت گام زمانی هر تکرار از رابطهٔ پیشنهادی (٤۲) به‌دست آمده است. استفاده از این رابطه برای نسبت گام زمانی، سبب تضمین همگرایی و همچنین افزایش چشم‌گیر نرخ همگرایی می‌گردد.



شکل ۱٤ درصد بهبود همگرایی در نمونه‌های مختلف در تحلیل غیرخطی

نتیجه‌گیری

در این مقاله رابطه‌سازی نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج پیشنهاد گردید. براین اساس، الگوریتم پیشنهادی بااستفاده از نگرۀ دایره‌های گرشگورین بهبود یافته به‌دست آمد [1]. برای سنجش عددی، سازه‌های مختلف مانند خرپا و قاب‌های دو و سه‌بعدی با رفتارهای کشسان خطی و غیرخطی هندسی، تحلیل شدند. نتایج عددی نشان داد نرخ همگرایی شیوۀ پیشنهادی mgDR که در آن از رابطۀ جرم ساختگی بهبودیافته استفاده شده است، بیشتر از روش‌های متداول oDR و mdDR می‌باشد. به سخن دیگر، الگوریتم پیشنهادی با تعداد تکرار کمتری نسبت به دیگر روش‌ها همگرا می‌شود. درنتیجه، زمان محاسبه‌ها و حجم عملیات کامپیوتری در فرایند پیشنهادی کمتر از دیگر الگوریتم‌های رهایی پویای لزج می‌باشد.

مراجع

1. Alamatian, J., "A New Formulation for Fictitious Mass of the Dynamic Relaxation Method with Kinetic Damping", *Computers & Structures*, Vol. 90-91, pp. 42–54, (2012).
2. Otter, J.R.H., "Dynamic Relaxation", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers,* Vol. 35, pp. 633–656, (1966).
3. Day, A.S., "An Introduction to Dynamic Relaxation", *The Engineer,* Vol. 219, pp. 218–221, (1965).
4. Otter, J.R.H., "Computation for Prestressed Concrete Reactor Pressure Vessels Using Dynamic Relaxation", *Nuclear Structural Engineering,* Vol. 1, pp. 61-75, (1965).
5. Brew, J.S. and Brotton, M., "Non-linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 3, pp. 463–483, (1971).
6. Lewis, W.J., Jones, M.S. and Lewis, G., "Cladding-network Interaction in Pretensioned Cable Roofs, Studied by Dynamic Relaxation", *Computers & Structures,* Vol. 19, pp. 885-897, (1984).
7. Kmet, S. and Mojdis, M., "Time-dependent Analysis of Cable Domes Using a Modified Dynamic Relaxation Method and Creep Theory", *Computers & Structures,* Vol. 125, pp. 11–22, (11–22).
8. Rushton, K.R., "Dynamic Relaxation Solutions of Elastic Plate Problems", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design,* Vol. 3, pp. 23–32, (1968).
9. Alwar, R.S. and Ramachandra-Rao, N., "Large Elastic Deformations of Clamped Skewed Plates by Dynamic Relaxation", *Computers & Structures,* Vol. 4, pp. 381-398, (1974).
10. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Geometrically Non-linear Analysis of Plates and Shallow Shells by Dynamic Relaxation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 123, pp. 15–32, (1995).
11. Barnes, M.R., "Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation", *International Journal of Space Structures,* Vol. 14, pp. 89–104, (1999).
12. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Inelastic Post-buckling Analysis of Truss Structures by Dynamic Relaxation Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, pp. 3633-3657, (1994).

13. Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Sowerby, R., "Analysis of Wrinkling and Buckling of Elastic Plates by DXDR Method", *Computers & Structures*, Vol. 65, pp. 561–574, (1997).
14. Lee, K.S., Han, S.E. and Park, T., "A Simple Explicit Arc-length Method Using the Dynamic Relaxation Method with Kinetic dDamping", *Computers & Structures,* Vol. 89, pp. 216–233, (2011).
15. Bunce, J.W., "A Note on Estimation of Critical Damping in Dynamic Relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 4, pp. 301–304, (1972).
16. Cassell, A.C. and Hobbs, R.E., "Numerical Stability of Dynamic Relaxation Analysis of Non-linear Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 10, pp. 1407–1410, (1976).
17. Papadrakakis, M., "A Method for the Automatic Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 25, pp. 35–48, (1981).
18. Rezaiee-Pajand, M. and Taghavian-Hakkak, M., "Nonlinear Analysis of Truss Structures Using Dynamic Relaxation", *International Journal of Engineering,* Vol. 19, pp. 11–22, (2006).
19. Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J., "A New Fictitious Time for the Dynamic Relaxation (DXDR) mMethod", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 74, pp. 996–1018, (2008).
20. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "The dDynamic Relaxation Method Using New Formulation for Fictitious Mass and Damping", *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 34, pp. 109–133, (2010).
21. Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R., "Nonlinear Dynamic Structural Analysis Using Dynamic Relaxation with Zero Damping", *Computers & Structures,* Vol. 89, pp. 1274–1285, (2011).
22. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Zhang, L.C., "A New Method of Fictitious Viscous Damping Determination for the Dynamic Relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 783–794, (2011).
23. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J., "Timestep Selection for Dynamic Relaxation Method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines,* Vol. 40, pp. 42–72, (2012).
24. Felippa, C.A., "Nonlinear Finite Element Methods (ASEN 5017)", Chapter 11, Course Material, (1999).
25. Underwood, P., "Dynamic Relaxation", *Computational Method for Transient Analysis,* Chapter 5, Vol. 1, pp. 245–265, (1983).
26. Guo, X., Bai, W. and Zhang, W., "Confidence Extremal Structural Response Analysis of Truss Structures under Static Load Uncertainty Via SDP Relaxation", *Computers & Structures,* Vol. 87, pp. 246–253, (2009).